Mathematik verstehen – Band 2

Zauber der Mathematik

Wolfgang Kuhn

Der erste Band des Buches Mathematik verstehen vom selben Autor ist erschienen im Paramon Verlag.

Wolfgang Kuhn: Mathematik verstehen
ISBN 978-3-03830-028-1

Messeturm, 60308 Frankfurt am Main

Paramon ® ist ein Imprint der
Europäische Verlagsgesellschaften GmbH

Sie finden den Verlag im Internet unter www.paramon.de

„Jede mathematische Formel in einem Buch halbiert die Verkaufszahl dieses Buches.“

Stephen Hawking (1942 - 2018)

Vorwort

Wenn man der Aussage von Stephen Hawking recht gibt, sollte man eine erfolgreiche Herausgabe eines derartigen Buches gar nicht erst anstreben. Andererseits möchte man die Freude am Lösen derart interessanter Aufgaben, wie sie in dem vorliegenden und ständig wachsenden Werk gestellt werden, mit ähnlich Interessierten an der Mathematik teilen. Insofern habe ich in diesem Fall auf den Druck eines Buches durch einen Verlag sowie eine formelle ISBN-Nummer verzichtet und mich auf den exklusiven Vertrieb über meine Homepage beschränkt.

Bei diesem Buch handelt es sich um eine Zusammenstellung von interessanten und oftmals auch überraschenden Erkenntnissen aus den unterschiedlichsten Bereichen der Mathematik, die mich begeistert haben, und zwar je mehr ich mich intensiver damit beschäftigt habe.

Ich hoffe, daß der Leser den gleichen Gefallen an diesen Überlegungen und Gedankengängen findet.

Mit diesen beiden Symbolen möchte ich das Augenmerk des Lesers auf Ergebnisse und Rechenschritte lenken, die eine besondere Beachtung, ein Innehalten und Nachdenken verdienen.
Die Glühlampe steht dabei für einen Geistesblitz oder eine Idee, die man gelegentlich braucht, um eine Aufgabe auf wesentlich leichtere und elegantere Weise zu lösen. Es lohnt sich ausdrücklich, derart markierte Rechenschritte oder bemerkenswerte Resultate genau zu verstehen und damit in das persönliche Wissen zu transportieren, um sie zu einem späteren Zeitpunkt abrufen und erneut anwenden zu können.
Das Symbol des gestreckten rechten Daumes steht für das erfolgreiche Anwenden von erlerntem bzw. erworbenem Wissen. Insbesondere werden Sie dieses Symbol an solchen Stellen vorfinden, an denen ein erwartetes oder auch so nicht erwartetes, in jedem Fall aber ein bemerkenswertes und überaus interessantes Ergebnis erzielt wird.

Herrenberg, im Oktober 2023

Inhaltsverzeichnis

Aufgaben

Aufgaben – Zauber der Mathematik

Und immer wieder das Binom

Die Aufgabenstellung lautet ganz einfach, die folgende Gleichung zu lösen.
Auf den ersten Blick meint man ja, daß diese Gleichung nur näherungsweise zu einem Ergebnis führen kann. Um so mehr wird man von der tatsächlichen Lösung überrascht sein.

Versuchen Sie es !

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=?$$

Fünf natürliche Zahlen und der Quotient 288

Im Schulhalbjahr 2013/2014 wurde Schülern des Schickhardt Gymnasiums Herrenberg während der Teilnahme an einem Mathematikwettbewerb folgende Aufgabe gestellt:

Es sind fünf verschiedene natürliche Zahlen gegeben. Weisen Sie nach, daß das Produkt aus allen möglichen Differenzen von jeweils zwei dieser 5 Zahlen durch 288 teilbar ist.

Auf den ersten Blick mag man diese Behauptung nicht glauben. Bei längerem Nachdenken und Ausprobieren mit beispielhaften Zahlen gelangt man jedoch zu der überraschenden Erkenntnis, daß die Behauptung wohl richtig ist. Die Frage allerdings bleibt, wie man diese Behauptung auch mathematisch beweisen kann.

Wahrscheinlichkeit des Übertrags bei der Summe

Bei dem gleichen o.g. Mathematikwettbewerb wurde den Schülern aus dem Bereich der Stochastik bzw. Wahrscheinlichkeitsrechnung die Frage gestellt, mit welcher Wahrscheinlichkeit es zu mindestens einem Übertrag bei der Summe zweier beliebig gewählter dreistelliger natürlicher Zahlen kommt.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 327 \\ +\ 584 \\ 911 \end{array}$$

Am Beispiel sehen wir, daß es in diesem Fall sogar 2-mal einen Übertrag gibt.

Konstruierbarkeit des Siebzehnecks

Der Kinofilm „Die Vermessung der Welt“ war Anstoß, sich mit der Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks und damit den Gedankengängen des berühmten Mathematikgenies Carl Friedrich Gauß (1777 -1855) auseinanderzusetzen. Auch wenn

Gauß die Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal meines Wissens selbst nicht demonstriert hat, so ist die Tatsache überhaupt doch maßgeblich seiner Lösung der mathematischen Gleichung $x^{17} - 1 = 0$ zu verdanken. Laut Literatur (siehe [2]) wurde die erste explizite Konstruktion durch Johannes Erchinger im Jahre 1825 veröffentlicht. Die von mir hier später eingehend erläuterte und nachvollzogene Konstruktion wurde gemäß Literaturverzeichnis [1] wohl erstmalig von Richmond im Jahre 1893 geliefert.

Daß überhaupt das Siebzehneck mit der Primzahl 17 konstruierbar sein sollte, war schon eine Überraschung, noch überraschender war die Erkenntnis über die Einfachheit und Freude bei der Nachvollziehung der Gedanken, die sich Gauß wohl bei der Lösung dieses mathematischen Problems gemacht haben mag.

Das Geburtstagsproblem

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Personen mindestens zwei von ihnen am gleichen Tag im Jahr Geburtstag haben?

Diese Aufgabenstellung ist immer wieder schön und taucht regelmäßig bei größeren Feiern oder Ansammlung von Menschen gerne auf.

Wußten Sie, daß schon bei 23 Menschen in einem Raum, die Wahrscheinlichkeit, daß zwei von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben größer als 50% ist?

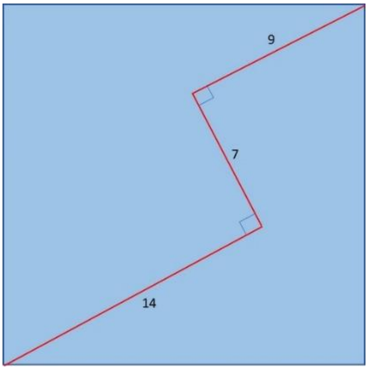
Wochentag des Geburtstags

Diese Fragestellung ist ein immer wiederkehrendes Problem und wird inzwischen im Internet oder auch von der ein oder anderen Smartphone APP behandelt. Es lohnt sich einmal an dieser Stelle auf die Mathematik hinter der Beantwortung dieser Frage zu schauen. Vielleicht können auch Sie bei einer Ihrer nächsten gesellschaftlichen Runden durch Wissen glänzen und Ihren Gästen deren Wochentag des Geburtstags ausrechnen.

Seitenlänge des Quadrats

Bei der folgenden Aufgabe ist aus den wenigen Angaben die Seitenlänge des dazu passenden Quadrates zu ermitteln. Dabei bilden die roten in der Länge vorgegebenen Linien jeweils einen rechten Winkel.

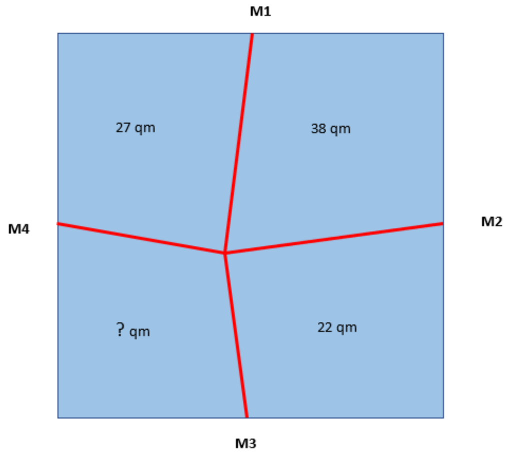
Die Längen der Linien sind 9, 7 und 14.



Und hier noch eine schöne Aufgabe:

Aus den vorliegenden Angaben ist die Flächengröße des vierten Vierecks sowie die Kantenlänge des abgebildeten Quadrates zu ermitteln.

M1 bis M4 bezeichnen die Mittelpunkte der vier Seiten des Quadrates. Die eingezeichneten Flächengrößen stimmen nicht unbedingt mit dem dazu abgebildeten Verlauf der roten Linien überein.

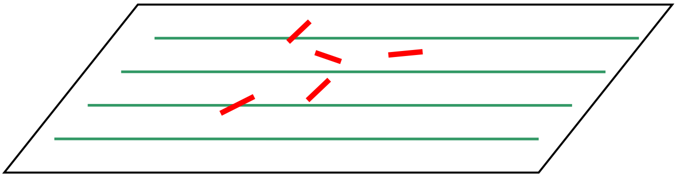


Die Lösung ist gar nicht so schwierig, wenn man weiß, daß sich die Fläche beliebiger Vierecke errechnen läßt, indem man ein Viereck in zwei Dreiecke zerlegt

Nadelproblem nach Buffon

Eine äußerst interessante Fragestellung ergibt sich im Bereich der Wahrscheinlichkeitslehre oder Stochastik aus dem Experiment eine Nadel der Länge l aus beliebiger Höhe auf eine mit parallelen Linien vom Abstand L durchzogene Fläche fallen zu lassen. Ich wiederhole hier das entsprechende Kapitel aus meinem Buch „Mathematik verstehen", welches im Paramon Verlag im Jahr 2013 erschienen ist, da sich mittels eines solchen Experiments die Größe der Zahl π näherungsweise bestimmen läßt; unglaublich oder nicht.

Es soll gelten: $l \leq L$, d.h. die Länge der Nadel ist kleiner oder gleich dem Abstand der Linien.



Die Frage lautet: mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft (berührt oder schneidet) die Nadel eine Linie ?

Memory

Bei dem Spiel Memory sind die Paare unter 2N Karten (bestehend aus N Paaren) aufzudecken. Zu Beginn des Spiels liegen alle Karten verdeckt, und solange nur verschiedene Karten aufgedeckt werden, haben die Spieler nur zufällig die Möglichkeit, ein Paar zu finden.

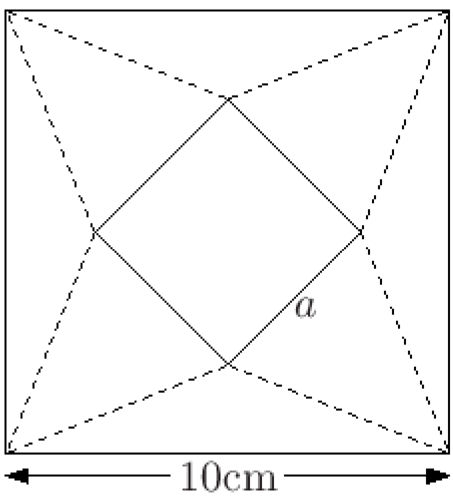
Deshalb stellt sich die Frage – ähnlich wie beim Geburtstagsparadoxon – wie viele Karten man aufdecken muß, um mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit (z. B. 50 %) mindestens ein Paar zu bekommen.

Volumenmaximierung einer Pyramide

Die folgende Aufgabe ist einmal mehr dem Internet Portal Mathematik Online der Universität Stuttgart am 11.01.2022 entnommen.

Aus einem quadratischen Stück Pappe mit einer Kantenlänge von 10cm soll, wie in der Abbildung illustriert, eine quadratische Pyramide mit einem maximalen Volumen gefertigt werden.

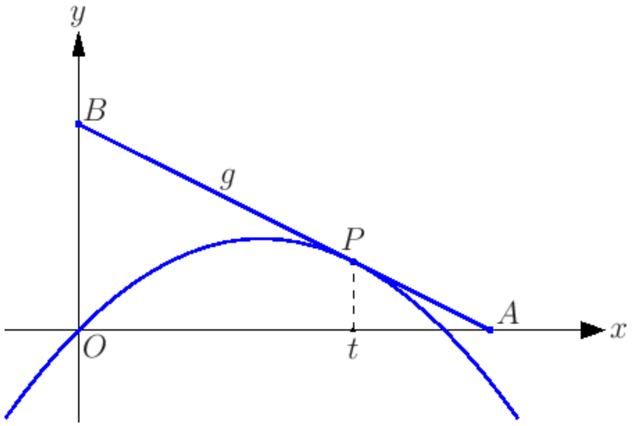
Gesucht ist nach der Kantenlänge a der Grundfläche der gesuchten Pyramide.



Tangente an eine Parabel und minimale Fläche

Eine weitere schöne Aufgabe findet sich ebenfalls im Mathematik Online Portal der Universität Stuttgart.

Eine Tangente $g(x)$ an die Parabel $y = x(1 - x)$ schneidet die Koordinaten in den Punkten A und B.



Geben Sie die Gleichung von $g(x)$ in Abhängigkeit von der x-Koordinate des Berührungspunktes P an. Für welchen Punkt P_{min} ist die Fläche des Dreiecks $\Delta(OAB)$ minimal und wie groß ist diese minimale Fläche ?

Rubik's Cube

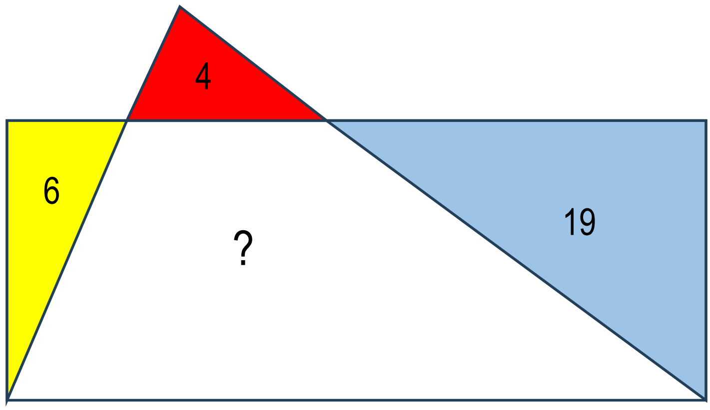
Aufgabe:
Rubik's Cube oder Der Zauberwürfel, bekannt seit über 40 Jahren, hat von seiner Faszination kaum etwas eingebüßt. Nimmt man ihn nach vielen Jahren einmal wieder in die Hand, beginnt die Verzauberung aufs Neue. Eine der Fragen, die sich immer wieder beim Hin- und Herdrehen der einzelnen Ebenen stellt, ist die nach der Anzahl aller Kombinationen bzw. Einstellungen des Zauberwürfels.

Hätten Sie sich jemals vorstellen können, daß es exakt 43.252 003.274.489.856.000 Einstellungen gibt. Das sind über 43 Trillionen, eine Zahl mit 18 angehängten Nullen – einfach unglaublich.
Würde man die gesamte Erdoberfläche mit den Würfeln überdecken, so könnte man dies fast 275-mal tun; d.h. es würde sich eine erdumspannende Schicht von fast 16 Metern Dicke ergeben. Zum Nachprüfen sei angemerkt, daß die Erdoberfläche ca. 511.207.893 Quadratkilometer beträgt (bei einem Erdradius im Mittel von 6.378,137 km).

Eine harte Nuß

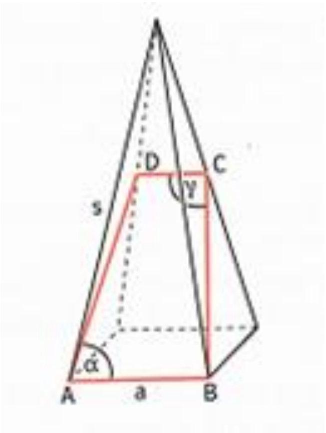
Die folgende Aufgabe ist der Facebook Gruppe „Mathematik & Physik Forum“ entnommen und hat mich irgendwie aufgrund der mehr oder weniger komplexen Aufgabenstellung zur Übernahme und Lösung animiert.

Es soll die mit einem Fragezeichen markierte weiße Fläche berechnet werden.



Trapez in Pyramide

Einer quadratischen Pyramide mit der Grundkante $a = 9.6\ cm$ und der Seitenkante $s = 24.4\ cm$ ist eine trapezförmige Fläche so einzuziehen, daß deren Seiten die Seitenkanten der Pyramide halbieren.



Berechne die Größe der Winkel α und γ .

Entfernung geostationärer Satelliten

Aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz läßt sich die Entfernung geostationärer Satelliten von der Erdoberfläche sowie deren Umlaufgeschwindigkeit ableiten. Wie kann man also diese Größen mit relativ einfachen Kenntnissen der Schulmathematik berechnen.

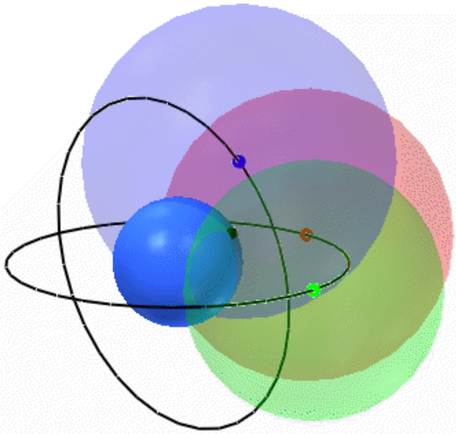
Wie funktioniert ein GPS-System ?

Im Prinzip ganz einfach. Mehrere Satelliten, die sich in einer bzw. mehreren geostationären Umlaufbahnen über der Erde befinden, strahlen regelmäßig ihren derzeit aktuellen Stand der Atomzeit aus. Das GPS-Gerät auf der Erdoberfläche empfängt dieses Signal und vergleicht es mit seiner eigenen Atomzeit. Aus der Differenz ergibt sich die Laufzeit des Signals vom Satelliten zum GPS-Empfänger auf der Erdoberfläche. Hieraus wiederum ergibt sich die Entfernung des Satelliten vom GPS-Empfänger, da man weiß, daß sich das Signal mit Lichtgeschwindigkeit bewegt.

D.h. wir erhalten um jeden Satelliten in seiner Umlaufbahn eine Kugel, an deren Oberfläche sich der GPS-Empfänger derzeit befinden kann.

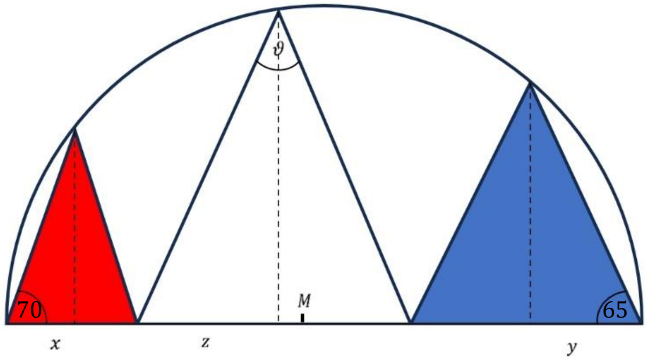
Die Oberfläche einer solchen Kugel eines einzelnen Satelliten bildet mit der Erdoberfläche einen Kreis als Schnittfläche. Zwei derartige Kreise schneiden sich in der Regel in 2 Punkten (z.B. in jeweils einem Punkt auf der nördlichen und einem auf der südlichen Halbkugel). Nimmt man einen dritten Satelliten hinzu, schneiden diese 3 Kreise sich exakt in einem einzigen Punkt, dem Standort des GPS-Empfängers.

Die folgenden Zeichnungen (nicht maßstabsgetreu) mögen dies verdeutlichen.



Aufgabe:
Die Aufgabe besteht nun darin, diesen Schnittpunkt dreier Kugeln an der Erdoberfläche exakt zu berechnen.

Dreiecke im Halbkreis



In einen Halbkreis mit Radius r sind zwei gleichschenkelige Dreiecke mit den Basiswinkeln 70^0 (im roten Dreieck) bzw. 65^0 (im blauen Dreieck) wie abgebildet eingezeichnet.

Aufgabe:
Wie groß ist der Winkel δ im weißen Dreieck?

Das Magische Quadrat

Ein solches 3 x 3 Quadrat bezeichnet man als Magisches Quadrat, wenn die Summe der Zahlen in allen Zeilen, allen Spalten und in den Hauptdiagonalen identisch ist.

	11	
5		
		8

Aufgabe:
Löse obiges Quadrat für die Summen 21, 27 und 51.

Ein Magisches 9 x 9 - Quadrat

Aufgabe:

a) Leite aus der vorherigen Aufgabe eine Lösung für ein magisches 9x9-Quadrat ab.

b) Warum liefert jedes Sudoku eine Lösung für ein “halb“-magisches 9x9-Quadrat?

3								9
4				5				7
	8		4		7		1	
		7	3	1	5	9		
		4	7	8	2	5		
	4		5		6		2	
5				2				6
6								5

Lösungen

Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis

1. Internetseiten http://mathworld.wolfram.com/Heptadecagon.html; Richmond, H. W. "A Construction for a Regular Polygon of Seventeen Sides." Quart. J. Pure Appl. Math. 26, 206-207, 1893.

2. Karin Reich: Die Entdeckung und frühe Rezeption der Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks und dessen geometrische Konstruktion durch Johannes Erchinger (1825). In: Mathesis, Festschrift zum siebzigsten Geburtstag von Matthias Schramm. Hrsg. von Rüdiger Thiele, Berlin, Diepholz 2000, S. 101–118.

3. Wolfgang Kuhn: Mathematik verstehen – Kompaktes Know-How für das Abitur und im Grundstudium; ISBN 978-3-03830-028-1; © 2013 Paramon Verlag, Messeturm, 60308 Frankfurt am Main.