Rubik's Cube

Aufgabe:

Rubik's Cube oder Der Zauberwürfel, bekannt seit über 30 Jahren, hat von seiner Faszination kaum etwas eingebüßt. Nimmt man ihn nach vielen Jahren einmal wieder in die Hand, beginnt die Verzauberung aufs Neue. Eine der Fragen, die sich immer wieder beim Hin- und Herdrehen der einzelnen Ebenen stellt, ist die nach der Anzahl aller Kombinationen bzw. Einstellungen des Zaberwürfels.

Lösung:

Bevor wir an die Lösung dieser Aufgabe gehen, müssen zunächst den möglichen Drehungen der einzelnen Ebenen mathematische Synonyme zugeordnet werden. Dabei ist es wichtig, den Würfel hinsichtlich der Orientierung einen Fixpunkt zu geben, d.h. eine der 6 Farben nach vorne zu richten und alle Mittelflächen (mittlere Fläche aller 6 Seiten) unverändert zu lassen.

Die Drehung der vorderen Frontfläche im Uhrzeigersinn um 90^o bezeichnen wir mit V, die entgegen dem Uhrzeigersinn mit V^{-1}. Entsprechend die hintere Fläche mit H, die rechte bzw. linke Seite mit R bzw. L und die Drehung der oberen bzw. unteren Fläche mit O bzw. U.

Eine der ersten Erkenntnisse bei allen Drehungen, und diese lässt sich schnell nachvollziehen, ist: **jede Einstellung geht aus einer <u>geraden</u> Anzahl von Vertauschungen hervor.**
Was heißt das? Ganz einfach, eine Drehung bedeutet die Veränderung jedes einzelnen Würfels um 2 Positionen im oder entgegen dem Uhrzeigersinn. Egal wie viel Vertauschungen hinter einer solchen Drehung stehen, das Ergebnis muß zwangsläufig immer eine gerade Anzahl ergeben.

Wenn man nunmehr alle theoretischen, in der Mathematik möglichen Kombinationen eines solchen Würfels betrachtet, so besteht der Zauberwürfel aus insgesamt 8 Ecken-Würfel (Würfel mit 3 sichtbaren Flächen) und 12 Kanten-Würfel (Würfel mit 2 sichtbaren Flächen). Wir erinnern an die Prämisse, dass die mittleren Würfel in ihrer Position unverändert bleiben. Die theoretische Anzahl beträgt damit:

$$P = (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot .... \cdot 2 \cdot 1) \cdot (12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot ...... \cdot 2 \cdot 1) = 8! \cdot 12!$$

Da wir bereits gesehen haben, dass in der Praxis jede Einstellung sich jedoch aus einer geraden Anzahl von Vertauschungen von einzelnen Würfeln ergibt, muß die Anzahl aller möglichen Kombinationen durch 2 dividiert werden.

Damit haben wir die mögliche Anzahl aller Positionen der einzelnen Ecken- und Kantenwürfel:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 8! \cdot 12!\,.$$

Bei allen bisherigen Überlegungen haben wir allerdings nicht beachtet, dass jeder Würfel an seiner Position unterschiedliche Orientierungen haben kann, d.h. ein Ecken-Würfel mit 3 Farben hat entsprechend 3 Orientierungen, ein Kanten-Würfel mit 2 Farbflächen 2 Orientierungen. Damit ergeben sich zunächst

$$Z = 3^8 \cdot 2^{12} \cdot P$$

Einstellungen des Würfels. Dabei unterstellen wir, dass ein einzelner Würfel seine Orientierung ändern kann, ohne dass ein anderer Würfel weder in seiner Position noch in seiner Orientierung ändert. Eine genauere Betrachtung zeigt jedoch sofort, dass dies nicht der Fall sein kann.

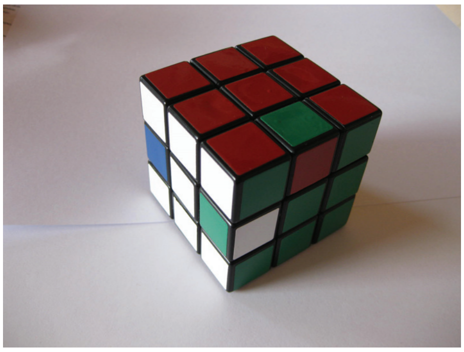
Um z.B. die Orientierung des mittleren oberen Kanten-Würfels der Frontfläche zu verändern (Farben vertauschen) müssen folgende Drehungen vorgenommen werden.

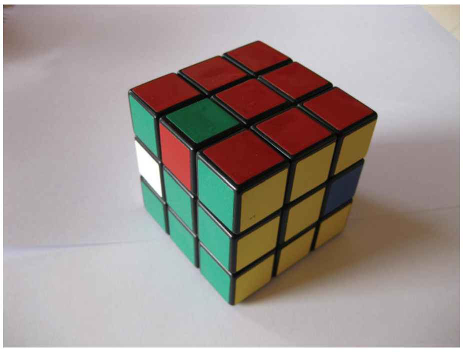
$$V O^{-1} U^{-1} L O^{-1} U^{-1} H O^{-1} U^{-1} R O^{-1} U^{-1}$$

Auf den ersten Blick mag diese Drehungsreihenfolge kompliziert aussehen, führt man jedoch eine weitere Drehung des mittleren, waagerechten Bandes und bezeichnet diese mit B, so lässt sich das gleiche Ergebnis wie folgt erreichen:

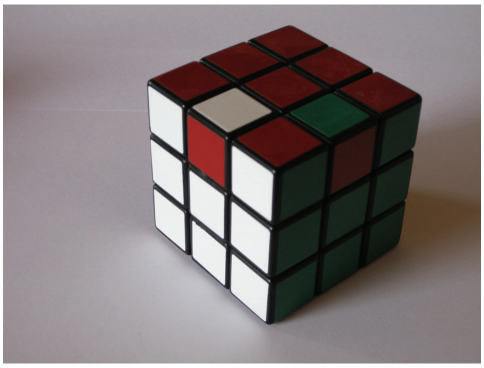
$$(V B)^4$$

Wir drehen als die vordere Frontfläche im Uhrzeigersinn, danach das mittlere Band ebenfalls im Uhrzeigersinn und wiederholen diese Drehungen noch 3-mal. Das Ergebnis zeigt eine neue Orientierung des oberen, mittleren Kanten-Würfels, jedoch auch eine Veränderung an 3 anderen Kanten-Würfeln. Eine Wiederholung der Drehungsreihenfolge bringt alle Würfel in die Ausgangslage inklusive ursprünglicher Orientierung zurück. Wir sagen auch, dass die vorgenommene Bewegung die Ordnung 2 hat.





Dreht man nach der ersten Bewegung (linke Abbildung) die obere Fläche um 90^o entgegen dem Uhrzeigersinn (also O^{-1}) und wiederholt die Bewegung, also die Drehungsreihenfolge), so ergibt sich die folgende Stellung.



Man sieht, dass sich die Orientierung bei zwei benachbarten Kanten-Würfeln verändert hat und ansonsten alle anderen Würfel die ursprüngliche Position und Orientierung haben.

Eine Wiederholung der gleichen Bewegung bedeutet grundsätzlich eine Rückkehr in exakt den ursprünglichen Zustand. D.h. die beschriebene Bewegung (Drehungs-Reihenfolge) hat die Ordnung 2. Es gibt keine Bewegung, bei der nur ein einzelner Kanten-Würfel seine Orientierung ändert. Wir müssen also die Anzahl der theoretisch möglichen Orientierungen durch 2 dividieren, da immer mindestens 2 Würfel gleichzeitig ihre Orientierung ändern.

Wir erhalten also als vorläufiges Ergebnis der Anzahl aller Kombinationen:

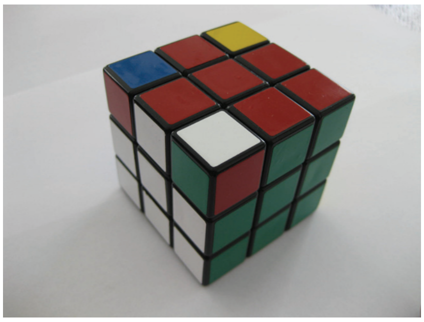
$$Z = 3^8 \cdot \frac{2^{12}}{2} \cdot P \,.$$

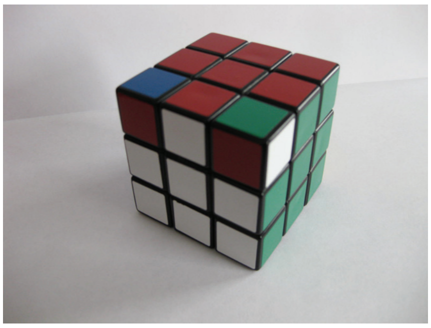
Schließlich betrachten wir die möglichen Veränderungen an der Orientierung der Ecken-Würfel.
Ähnlich den Kanten-Würfeln gilt auch hier, dass sich die Orientierung nur bei einem einzigen Ecken-Würfel nicht verändern lässt, ohne dass sich diese bei mindestens zwei anderen ebenfalls verändert.

Folgende Bewegung führt zur Veränderung der Orientierung des oberen rechten Ecken-Würfels der vorderen Frontfläche.

$$\left(R V^{-1} R^{-1} V\right)^2$$

Ein dreifache Wiederholung dieser Bewegung bringt den Würfel wieder in die ursprüngliche Lage zurück. Dabei ist zu beachten, dass der Ecken-Würfel, dessen Orientierung verändert werden soll, sich zu Beginn immer in der oberen rechten Ecke der vorderen Frontfläche befinden muss. Man sieht, dass sich so beispielsweise 3 Ecken-Würfel der oberen Ebene verändern lassen ohne eine einzige Veränderung an den unteren beiden Ebenen. So lässt sich die Bewegung auch dazu nutzen, die Orientierung eines Ecken-Würfels zweimal und die eines weiteren Ecken-Würfels der oberen Ebene einmal zu verändern.





Grundsätzlich gilt also, dass die beschriebene Bewegung die Ordnung 3 hat, d.h. dass sich die Orientierung immer gleichzeitig bei 3 Würfeln ändert (mathematisch identisch mit der zweifachen Veränderung bei einem und der einfachen Veränderung bei einem anderen Ecken-Würfel).

Damit erhalten wir als endgültiges Ergebnis der Anzahl aller Kombinationen für den Zauberwürfel:

$$Z = \frac{3^8}{3} \cdot \frac{2^{12}}{2} \cdot P = \frac{3^8}{3} \cdot \frac{2^{12}}{2} \cdot \frac{8! \cdot 12!}{2} \qquad \text{oder}$$

$$Z = 43.252.003.274.489.856.000$$

In Worten: 43 Trillionen, 252 Billiarden, 3 Billionen, 274 Milliarden, 489 Millionen und 856 Tausend, eine schier unglaubliche Zahl – eine 43 mit 18 Nullen. Würde man beispielsweise soviel Würfel (jeder mit einer anderen Einstellung) aneinander legen (bei einer Kantenlänge des Original Rubik's Cube von 5.7 cm), ergäbe sich eine Strecke von

2.465.364.186.645.918,792 km Länge,

was ungefähr einer über 61 milliarden-fachen Umrundung der Erde am Äquator entspräche, oder der ca. 16 millionen-fachen Entfernung von der Erde zur Sonne. Man stelle sich vor, dass die Entfernung der Erde von der Sonne im Mittel 149.600.000 km beträgt.

Würde man die gesamte Erdoberfläche mit den Würfeln überdecken, so könnte man dies fast 275-mal tun; d.h. es würde sich eine erdumspannende Schicht von fast 16 Metern Dicke ergeben. Zum Nachprüfen sei angemerkt, dass die Erdoberfläche ca. 511.207.893 Quadratkilometer beträgt (bei einem Erdradius im Mittel von 6.378,137 km).