

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	11
---------------	----

Analysis	16
----------------	----

Differentialrechnung.....	16
Produktregel	17
Höhere Ableitungen.....	18
Quotientenregel.....	18
Kettenregel.....	19
Anwendung der Kettenregel.....	20
Einige wichtige Ableitungen.....	21
Integralrechnung	22
Partielle Integration	25
Integration durch Substitution.....	26
Vereinfachung durch Partialbruchzerlegung.....	27
Gebietsintegral oder Doppelintegral.....	27
Schief abgeschnittener elliptischer Zylinder.....	28
Hauptsatz der Analysis.....	29
Einige wichtige unbestimmte Integrale	30
Trigonometrische Funktionen	31
Exponentialfunktionen	33
Reihen	34
Geometrische Reihe.....	34
Harmonische Reihe.....	37
Alternierende Reihe.....	38
Volumen einer Kugel.....	40
Majorante und Minorante einer Reihe	42
Quotientenkriterium	43
Cauchy Kriterium.....	43
Spezielle Reihen.....	43
Taylorreihe.....	44
Beweis für die Eulersche Zahl e	46
Beweis für den natürlichen Logarithmus $\ln$	47
Taylor-Entwicklung für einige trigonometrische Funktionen.....	48
Differentialgleichungen	49
Problemstellungen / Lösungsmethoden.....	50
Geschichte und Motivation.....	50
Typen von Differentialgleichungen.....	50
Spezielle lineare Differentialgleichungen	51
Trennung der Veränderlichen	51
Beschränktes und unbeschränktes exponentielles Wachstum	52
Lösung mittels Substitution	53
Lineare Differentialgleichung	55
Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	57
Homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	58
Inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.....	59
Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.....	62

Aufgaben zur Analysis66

Ein Floh hüpft im Dreieck.....	66
Ein auf dem Zahlenstrahl herumhüpfender Floh.....	67
Geometrische Reihe im rechtwinkligen Dreieck.....	68
Bauklötzchen Überhang.....	69
Kreuzung und 2 Autos.....	70
Koeffizienten einer Parabel, die drei Geraden berührt.....	72
Sich überlagernde Parabeln.....	72
Untersuchung von Polynomen.....	74
Bierdeckel drehen.....	75
Kurvendiskussionen.....	77
Ganzrationale Funktion 3. Grades.....	78
Gebrochen rationale Funktionen.....	79
Achsensymmetrische Parabel 4. Grades.....	83
Maximales Volumen einer Schachtel.....	84
Maximale Fläche unter einer Kurve.....	85
Wasserbecken mit Zufluß und Abfluß.....	86
Tilgung eines Darlehens.....	87
Durchbiegung eines eingespannten Trägers unter Last.....	89
Inhomogene lineare DGL 2. Ordnung.....	91
Homogene lineare DGL 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.....	91

Algebra.....94

Fundamentalsatz der Algebra.....	94
Lineare Gleichungssysteme.....	95
Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n	99
Beweis durch vollständige Induktion.....	100
Die Summe der Quadratzahlen von 1 bis n^2	101
Summe der Kubikzahlen von 1 bis n^3	104
Binomischer Lehrsatz.....	105
Die Mitternachtsformel oder doch nicht?.....	107
Wurzelziehen per Hand.....	108
Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.....	110
Lineare Optimierung.....	113

Aufgaben zur Algebra118

Endziffern von Potenzen.....	118
Mathe-Olympiade 2008/2009.....	119
Münzen im Geldsack.....	120
Kopf und/oder Zahl.....	121
Umfüllaufgaben.....	122
Wer lügt, wer sagt die Wahrheit?.....	123
Flussüberquerung.....	124
Anwendung der Logarithmus Regeln.....	125
Mischungsverhältnis ändern.....	126
Klassenfahrt.....	126

Geometrie130

Geschichte der Geometrie.....	131
-------------------------------	-----

Der Goldene Schnitt.....	132
Satz des Pythagoras.....	134
Der Kreis des Thales.....	135
Schwerpunkt eines Dreiecks.....	136
Additionstheorem Sinus, Cosinus und Tangens	137
Peripherie- und Mittelpunktswinkel.....	139
Cartesische versus Polar-Koordinaten.....	141
Kugelkoordinaten.....	144
Bewegte Bezugssysteme.....	145

Aufgaben zur Geometrie 150

Denken statt Rechnen.....	150
Pyramidenbesteigung.....	151
Additionstheorem für den Cosinus	154
Quadrat im rechtwinkligen Dreieck.....	154
Zerlegung eines Dreiecks.....	157
Konstruktion eines regelmäßigen Zehnecks.....	159
Vier Viertelkreise im Quadrat.....	161
Kreisausschnitte.....	162
Geometrien im Sechseck.....	163
Die Eulersche Gerade.....	164
Spinne frisst Fliege.....	166
Ein Sechseck im Quader	167
Spielerei mit sich berührenden Kreisen	168
Begrenzung einer Weidefläche.....	173
Elfmeter genau an die Querlatte	174
Verhältnisse im Parallelogramm.....	176
Faden um einen Würfel	177
Pflasterung mit Doppelsteinen	178

Vektoralgebra..... 182

Allgemeines.....	182
Rechenoperationen	183
Addition und Subtraktion.....	183
Multiplikation mit einem Skalar	184
Skalarprodukt.....	184
Kreuzprodukt.....	186
Spatprodukt.....	188
Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.....	189
Orthogonalbasis	190
Anwendungsbeispiele	191
Lorentzkraft.....	191
Gravitation und Satelliten Umlaufbahn.....	192
Geraden	194
Punkt-Richtungs-Form.....	194
Zwei-Punkte-Form	194
Abstand Punkt – Gerade.....	195
Abstand zweier Geraden.....	199
Ebenen	201
Standardform: Punkt und zwei Richtungsvektoren	201
Drei-Punkte-Form einer Ebene.....	202

Koordinatenform	203
Hessesche Normalform einer Ebene	205
Umrechnung Parameterform in Koordinatenform	207
Umrechnung Koordinatenform in Parameterform	208
Abstand Punkt – Ebene.....	208
Abstand Punkt - Gerade mittels einer Hilfsebene.....	208
Schnittwinkel zwischen einer Ebene und einer Geraden	210
Schnitt zweier Ebenen.....	211

Aufgaben zur Vektoralgebra..... 214

Vorbereitungen zur Abi-Prüfung	214
Abstand zweier windschiefer Geraden	214
Abstand zweier paralleler Geraden	216
Gleicher Abstand eines Punktes von 3 Ebenen	216
Schnittwinkel zweier Geraden mit einer Ebene	217
Ablenkung von der geplanten Flugrichtung.....	218
Ellipsen und Hyperbeln	219
Brennpunkt von Paraboloiden.....	222
Ecken eines Würfels	223
Winkelberechnung aus den Seitenlängen eines Dreiecks	226
Flugzeug im Landeanflug.....	227
Einfache Berechnungen mittels Vektoralgebra	229
Aufstellung der Ebenen-Gleichung.....	229
Spiegelung von Punkten an einer Ebene	231
Geraden und vieles mehr	231
Projektion	238

Wahrscheinlichkeitsrechnung..... 240

Anordnung von Permutationen.....	240
Unterscheidbare Objekte mit Beachtung der Reihenfolge	240
Objekte mehrerer Klassen mit/ohne Beachtung der Reihenfolge	241
Auswählen mit Beachtung der Reihenfolge	242
Variation ohne Zurücklegen	242
Variation mit Zurücklegen.....	242
Auswählen ohne Beachtung der Reihenfolge	243
Kombination ohne Zurücklegen	243
Kombination mit Zurücklegen (Repetition)	244
Würfelspiel.....	244
Zusammenfassung	247
Kugeln aus Urne ziehen	247
Ohne Zurücklegen.....	247
Mit Zurücklegen.....	248
Bedingte Wahrscheinlichkeit.....	251
Hypothesen- und Signifikanztests.....	253

Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung..... 260

Pokerblätter	260
Kein Trumpf auf der Hand	262
Doppelkopf.....	264
48 Karten in vier Farben.....	268

Paare bzw. Paarungen (z.B. beim Fußball) bilden	270
Würfeln mit einem idealen Würfel mit 3 verschiedenen Farben	271
Streichholz ziehen	273

Aufgaben aus Freude an der Mathematik..... 276

Rubik's Cube.....	276
Nadelproblem nach Buffon	279
Wie funktioniert ein GPS System ?	281
Wachsender Sandberg mit Schüttgut vom Förderband	285
Äquatorseil um 1 Meter verlängert	286
Äquatorseil – und Vektoralgebra.....	289
Flug eines Golfballs	290

Index..... 294

Literaturverzeichnis..... 298