Zauber der Zahlen

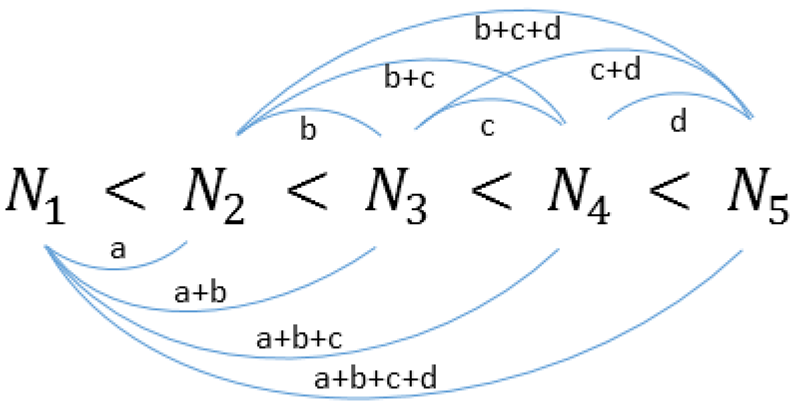
Fünf natürliche Zahlen und der Quotient 288

Im Schulhalbjahr 2013/2014 wurde Schülern des Schickhardt Gymnasiums Herrenberg während der Teilnahme am Mathematikwettbewerb folgende Aufgabe gestellt:

Es sind fünf verschiedene natürliche Zahlen gegeben. Weisen Sie nach, dass das Produkt aus allen möglichen Differenzen von jeweils zwei dieser 5 Zahlen durch 288 teilbar ist.

Auf den ersten Blick mag man diese Behauptung nicht glauben. Bei längerem Nachdenken und Ausprobieren mit beispielhaften Zahlen gelangt man jedoch zu der überraschenden Erkenntnis, dass die Behauptung wohl richtig ist. Die Frage allerdings bleibt, wie man diese Behauptung auch mathematisch beweisen kann.

Seien mit $N_1 < N_2 < N_3 < N_4 < N_5$ die fünf verschiedenen natürlichen Zahlen in der beschriebenen Ordnung gegeben.



Es sei:

$N_2 - N_1 = a$
$N_3 - N_2 = b$
$N_4 - N_3 = c$
$N_5 - N_4 = d$

Für das Produkt P gilt dann:

$$P = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot (a+b) \cdot (a+b+c) \cdot (a+b+c+d) \cdot (b+c) \cdot (b+c+d) \cdot (c+d)$$

Zu zeigen ist jetzt, dass dieses Produkt durch 288 teilbar ist. Dazu zerlegt man zunächst 288 in seine Primfaktoren und erkennt, dass $288 = 2^5 \cdot 3^2$ ist. Es ist also nachzuweisen, dass der Faktor 2 fünfmal und der Faktor 3 zweimal in dem beschriebenen Produkt enthalten ist.

Um sich der Lösung zu nähern, unterscheiden wir zunächst zwischen den beiden Fällen: die Differenzen a, b, c, d sind alle gerade oder ungerade bzw. zwei oder weniger als zwei der Differenzen sind durch 3 teilbar.

1. Alle Differenzen a, b, c, d sind gerade oder ungerade

   Sind alle Differenzen gerade, sind auch deren Summen gerade. Wir können also sofort schliessen, dass damit der Faktor 2 mindestens fünfmal enthalten ist.
   Sind dagegen alle Differenzen ungerade, so sind die Summen $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+d)$ gerade, womit der Faktor 2 schon dreifach enthalten ist. Können wir jetzt zeigen, dass $(a+b+c+d)$ den Faktor 2 zweifach bzw. den Faktor 4 enthält, wäre gezeigt, dass in diesem Fall der Faktor 2 in der behaupteten Vielfachheit enthalten wäre.
   Da die Differenzen ungerade sind, unterscheiden wir zwischen: die Zahlen bilden bei Division durch 4 den Rest 1 oder den Rest 3. Man sagt dazu auch beispielsweise $a = 1\ mod\ 4$ (also Rest 1, z.B. die Zahlen 1, 5, 9, 13 usw.) oder $a = 3\ mod\ 4$ (Rest 3, z.B. die Zahlen 3, 7, 11, 15 usw.).
   Würde nur eine der Zahlen a, b, c, d bei Division durch 4 den Rest 3 ergeben, also z.B. die Zahl b, wären die Summen $(a+b)$ und $(b+c)$ und damit auch die Summe $(a+b+c+d)$ durch 4 teilbar. Damit wäre der Faktor 2 bereits 6-fach in dem genannten Produkt enthalten. Hinzu käme ja noch die Summe $(c+d)$, die ja zumindest ebenfalls gerade und damit durch 2 teilbar ist, d.h. der Faktor 2 wäre sogar 7-fach vertreten..
   Würden alle Zahlen bei Division durch 4 den Rest 1 ergeben, hätten wir in dem Produkt aus den Summen $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+d)$ den Faktor 2 bereits 3-fach vertreten. Die Summe $(a+b+c+d)$ ist aufgrund der Annahme jedoch nun durch 4 teilbar, enthält also den Faktor 2 zweifach, womit die Behauptung, dass in dem Ausgangsprodukt der Faktor 2 fünfach vorkommt, bewiesen ist.

2. Zwei oder weniger als zwei der Differenzen sind durch 3 teilbar

   Im Fall, dass zwei Differenzen durch 3 teilbar sind, wäre natürlich auch im Ausgangsprodukt P der Faktor 3 zumindest zweifach, also in der behaupteten Vielfachheit, vertreten.
   Untersuchen wir also zunächst den Fall, dass keine der Zahlen a, b, c, d durch 3 teilbar ist. Ähnlich wie in Punkt 1 unterscheiden wir hier zwischen: eine Zahl ergibt bei Divison durch 3 den Rest 1 (z.B. 1, 4, 7 usw.) oder den Rest 2 (z.B. 2, 5, 8 usw.).
   Würde für alle Zahlen gelten: $a, b, c, d = 1\ mod\ 3$, d.h. alle hätten bei Divison durch 3 den Rest 1, dann müssen die Summen $(a+b+c), (b+c+d)$ durch 3 Teilbar sein, und die Behauptung wäre für diesen Fall bewiesen.
   Würde für nur eine Zahl, also z.B. die Zahl c gelten, dass sie bei Divison durch 3 den Rest 2 ergäbe, d.h. $c = 2\ mod\ 3$, wären die Summen $(b+c)$ und $(c+d)$ durch 3 teilbar. Und auch damit wäre die Behauptung bewiesen.
   Den Fall, dass genau eine der Zahlen durch 3 teilbar ist, brauchen wir nicht weiter zu untersuchen, da die Behauptung sehr schnell mit den soeben gewonnenen Erkenntnissen auf triviale Art und Weise auch hier nachzuweisen ist.

Alle anderen Fälle, so z.B. dass zwei der Zahlen gerade und zwei ungerade sind, lassen sich mit der gleichen Vorgehensweise bearbeiten. Wir verzichten hier auf die weitere Betrachtung.
Den mathematischen Ausdruck $k = n\ mod\ m$ spricht am auch $k\ ist\ gleich\ n\ modulo\ m$, und er besagt, dass die Zahl k bei Divison durch m den Rest n ergibt. Es versteht sich von selbst, dass hierbei gilt: $0 \leq n \leq (m-1)$.
Beispiel: $5 = 2\ mod\ 3$, $4 = 1\ mod\ 3$, $3 = 0\ mod\ 3$.