Andreas Stucke Herrenberg, den 3.03.2010

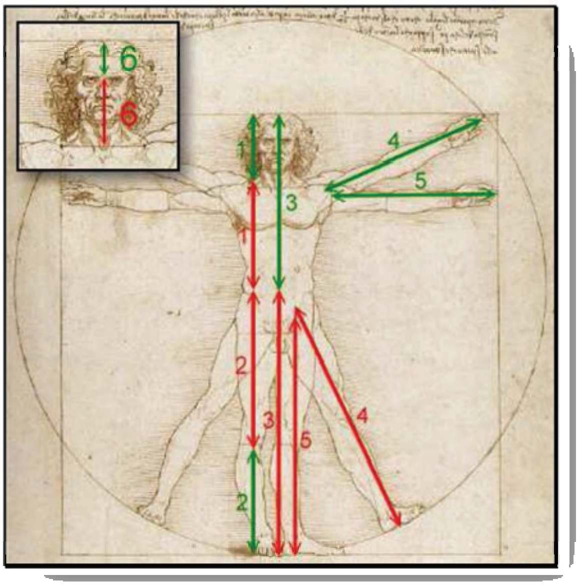
Der **Goldene** Schnitt

Was haben diese Dinge miteinander zu tun?

Ganz einfach in jedem dieser drei Bilder versteckt sich der Goldene Schnitt, man muss nur wissen wo er ist!

Goldener Schnitt?

Die wohl bekannteste Figur, die man mit dem Begriff des Goldenen Schnitts verbindet, ist die der Vitruvianische Mensch von Leonardo Da Vinci (1452-1519).
Hier steht der Mensch einmal im Mittelpunkt eines Kreises(Kreismittelpunkt ist der Nabel), sowie in einem Quadrat(Mittelpunkt ist hier der Schnittpunkt der Diagonalen und liegt im Schritt des skizzierten Mannes). Das Verhältnis von Quadratseite zum Kreisradius entspricht mit einer geringfügigen Abweichung dem Goldenen Schnitt.



Als "Goldenen Schnitt" bezeichnet man die Teilung einer Strecke in zwei Abschnitte in der Weise, dass sich der kleinere Abschnitt zum Größeren wie der Größere zur gesamten Strecke verhält.

Aber wie berechnet man den Goldenen Schnitt jetzt exakt.
Dazu schauen wir uns zunächst die geometrische Konstruktion näher an.

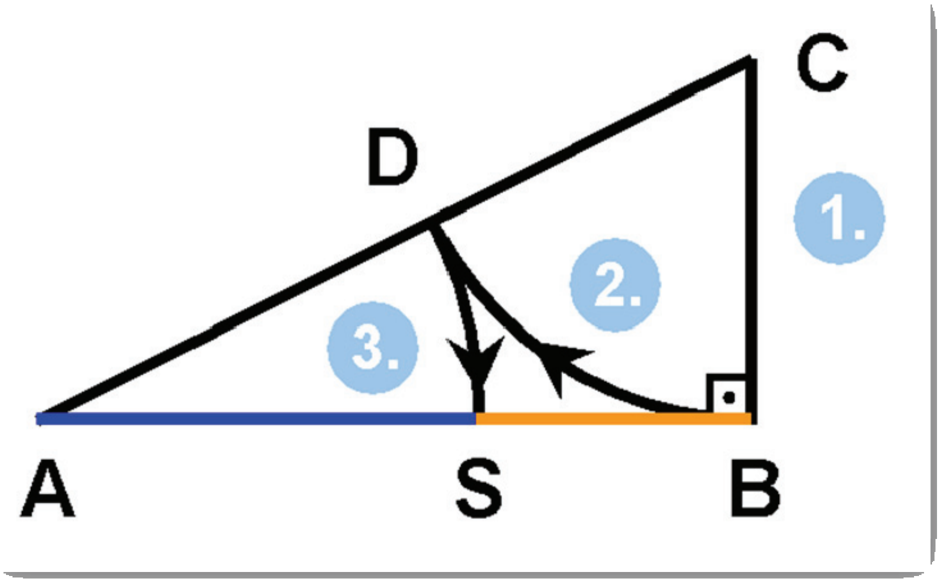
Die Konstruktion:

Gegeben ist eine Strecke $\overline{AB}$.

1)Im Punkt B wird eine Orthogonale zu $\overline{AB}$ gezeichnet und dann ein Kreis um B mit Radius $\frac{1}{2}\overline{AB}$ gezogen, der die Orthogonale im Punkt C schneidet.

2)Dann wird ein Kreis gezeichnet mit Mittelpunkt C und Radius $\overline{CB} = \frac{\overline{AB}}{2}$, der wiederum die Strecke $\overline{AC}$ im Punkt D teilt.

3)Schlussendlich wird ein Kreis um A gezeichnet mit Radius $\overline{AD}$, der die Strecke $\overline{AB}$ im Punkt S schneidet und damit diese im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt.



Eine Strecke $\overline{AB}$ wird durch einen Punkt S im Verhältnis des **Goldenen Schnittes** geteilt wenn gilt:

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{AS}}$$

Bildlich gesprochen heißt dies, dass sich der größere Abschnitt zur gesamten Strecke im gleichen Verhältnis befindet wie der kleinere zum größeren.

Wegen $\overline{AB} = \overline{AS} + \overline{SB}$ kann man auch schreiben: $\frac{\overline{AS}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB} - \overline{AS}}{\overline{AS}}$

Beweis:

Mathematisch gilt:

$$\overline{AS}=\overline{AD}=\sqrt{\overline{AB}^2+\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2}-\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{5}-\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\overline{AB}}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\text{ d.h.}$$

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}6180\ldots$$

Der reziproke Wert hiervon, also das Verhältnis des größeren Abschnitts zum kleineren beträgt dann:

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}=\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}=\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1{,}6180\ldots$$

Jetzt müssen wir nur noch zeigen dass das Verhältnis $\frac{\overline{AB}-\overline{AS}}{\overline{AS}}$ identisch ist.

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}-\overline{AS}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{AB}-\frac{\overline{AB}}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{\frac{\overline{AB}}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{\frac{\overline{AB}}{2}\left(2-\left(\sqrt{5}-1\right)\right)}{\frac{\overline{AB}}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}$$

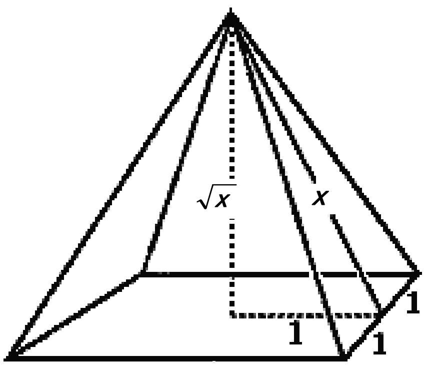
$$\frac{\overline{AB}-\overline{AS}}{\overline{AS}}=\frac{-5+2\sqrt{5}+3}{5-1}=\frac{2\sqrt{5}-2}{4}=\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Damit ist der mathematische Beweis dafür erbracht, dass die beschriebene Konstruktion die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt.

Geschichte:

Der Sachverhalt des Goldenen Schnitts, also das Verhältnis der skizzierten Teilung einer Strecke wurde um ca. 300 v.Chr. von Euclid zum ersten Mal erwähnt.
Die erste bekannte Berechnung soll jedoch erst 1597 von einem Tübinger Professor in einem Brief an einen seiner früheren Schüler erfolgt sein.

Aber auch in Gebäuden ist der Goldenen Schnitt eingebaut wie z.B. hier die Cheopspyramide in Gizeh in Ägypten.



Unbekannte Worte:

-Orthogonale: Orthogonal ist wenn eine Gerade senkrecht auf einer anderen steht.

-Reziproke Wert: Der Reziproke Wert ist ein anderes Wort für den Kehrbruch.

Quellen:

Mathematik verstehen
Pro Business Verlag ISBN 978-3-86805-537-5

Wikipedia

Mathe-Zaubergarten mit Spaß